Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 85

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

3 de enero de 2023

1. Demostrar la invariancia de $E_aE_b|v_a - v_b|$.

Empezamos demostrando la relación $E_aE_b|\vec{v}_a - \vec{v}_b| = \sqrt{(E_b\vec{p}_a - E_a\vec{p}_b)^2}$

$$E_aE_b|\vec{v}_a - \vec{v}_b| = E_aE_b\left|\frac{\vec{p}_a}{E_a} - \frac{\vec{p}_b}{E_b}\right| = |E_b\vec{p}_a - E_a\vec{p}_b| = \sqrt{(E_b\vec{p}_a - E_a\vec{p}_b)^2}$$

Asumiendo que los trimomentos tienen dirección $\hat{x}$, bajo un $x-$*boost* tenemos las transformaciones

$$E' = \gamma(E - vp_x), \qquad p'_x = \gamma(p_x - vE)$$

$$\begin{aligned} E'_bp'_{ax} - E'_ap'_{bx} &= \gamma(E_b - vp_{bx})\gamma(p_{ax} - vE_a) - \gamma(E_a - vp_{ax})\gamma(p_{bx} - vE_b) \\ &= (\gamma^2 - v^2\gamma^2)(E_bp_{ax} - E_ap_{bx}) = E_bp_{ax} - E_ap_{bx} \end{aligned}$$

De forma alternativa, podemos expresar la cantidad $(E_bp_{ax} - E_ap_{bx})^2$ de forma claramente invariante, sabemos que cantidades de la forma p_a^2, p_b^2 y $p_a \cdot p_b$ son invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Expandiendo el cuadrado obtenemos

$$(E_bp_{ax} - E_ap_{bx})^2 = E_b^2p_{ax}^2 + E_a^2p_{bx}^2 - 2E_aE_bp_{ax}p_{bx}$$

Todos los elementos de la derecha tienen dimensión 4, mezclando 2 términos de p_a con 2 términos de p_b. Por lo tanto, vamos a calcular los invariantes $p_a^2p_b^2$ y $(p_a \cdot p_b)^2$, pues tienen las mismas características

$$m_a^2m_b^2 = (E_a^2 - p_{ax}^2)(E_b^2 - p_{bx}^2) = E_a^2E_b^2 + p_{ax}^2p_{bx}^2 - E_b^2p_{ax}^2 - E_a^2p_{bx}^2$$

$$(p_a \cdot p_b)^2 = (E_aE_b - p_{ax}p_{bx})^2 = E_a^2E_b^2 + p_{ax}^2p_{bx}^2 - 2E_aE_bp_{ax}p_{bx}$$

Una simple comparación nos permite darnos cuenta que

$$(E_bp_{ax} - E_ap_{bx})^2 = (p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2m_b^2$$

De forma que $(E_bp_{ax} - E_ap_{bx})^2$ es claramente invariante Lorentz. Es interesante darnos cuenta que, si bien $(E_bp_{ax} - E_ap_{bx})^2$ es invariante solo si consideramos *boosts* en la dirección x, la combinación $(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2m_b^2$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz arbitrarias.